

# RESTRICTIONS POTENTIELLES DE L'APPLICATION DE LA THEORIE DES LIGNES DE TRANSMISSION: QUANTIFICATION DES ERREURS D'APPROXIMATION ET INTERET DES APPROCHES CORRECTIVES

S. Chabane<sup>1</sup>, P. Besnier<sup>1</sup>, M. Klingler<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IETR UMR 6164 - INSA de Rennes, Groupe Antennes et Hyperfréquences  
20 av. des Buttes de Coësmes 35043 Rennes France, E-mail: sofiane.chabane@insa-rennes.fr

<sup>2</sup>PSA Peugeot-Citroën, Centre Technique de Vélizy, DRD/DRIA/DSTF/C3E/CEAP  
2 route de Gisy, 78943 Vélizy-Villacoublay Cedex, E-mail: marco.klingler@mps.com

**Résumé :** Cette communication traite des conditions d'application de la théorie des lignes de transmission classique. Elle présente une évaluation des erreurs commises lors de l'utilisation de cette théorie dans certaines conditions particulières. L'objectif est de cerner les situations pour lesquelles une solution alternative à la théorie des lignes de transmission classique (TLT) doit être recherchée.

**Mots-clés :** Compatibilité électromagnétique (CEM), Equations de Maxwell, Câblages, Interférences, Théorie des lignes de transmission, Electromagnetic compatibility (EMC), Interferences, Maxwell Equations, Transmission Line Theory, Electrical Harnesses.

## 1. INTRODUCTION

La théorie des lignes de transmission est utilisée de manière quasi-systématique dans le contexte de la propagation des interférences électriques sur les réseaux de câbles. Bien qu'utilisée dans des domaines de fréquences où elle semble raisonnablement applicable, il convient d'apprécier les erreurs commises, et si elles s'avèrent trop importantes, de rechercher des solutions alternatives.

Pour cela, une investigation sur l'influence de la hauteur de la ligne, de la fréquence du signal qui y est transporté ainsi que des conditions de charges a été mise en œuvre. Une comparaison des résultats du calcul rigoureux et ceux de la TLT a été effectuée.

Bien que les résultats présentés ci-après soient intimement liés aux hypothèses fondamentales de l'approximation de la théorie des lignes, les codes de calcul utilisés actuellement ne mentionnent pas de limitation particulière. Il convient donc de cerner les

domaines d'application pour lesquels l'erreur commise est trop importante pour ne pas pouvoir se passer d'une méthode corrective ou alternative.

## 2. DES EQUATIONS DE MAXWELL A LA THEORIE DES LIGNES DE TRANSMISSION

La théorie des lignes de transmission classique dans le contexte du couplage avec une onde électromagnétique incidente (équations des télégraphistes généralisées) est décrite par les modèles de Taylor [1], d'Agrawal [2], ou de Rachidi [3]. D'apparences différentes, ces descriptions sont néanmoins complètement équivalentes [4]. Les équations de ces modèles sont une forme particulière simple des équations de Maxwell. On peut, donc, à partir de ces secondes dériver les premières.

Dans ce qui suit, on considérera le modèle d'Agrawal pour un fil fini, mince, uniforme, sans pertes, au-dessus d'un plan de masse parfaitement conducteur et illuminé par un champ électromagnétique incident (Fig. 1).

Les conditions d'exercice de l'approximation de la théorie des lignes de transmission sont les suivantes:

- le rayon (a) du fil doit être **très inférieur** à sa hauteur (h)
- la hauteur (h) du fil doit être **très inférieure** à la longueur d'onde ( $\lambda$ )
- la longueur (L) du fil doit être **très grande** à (2h).

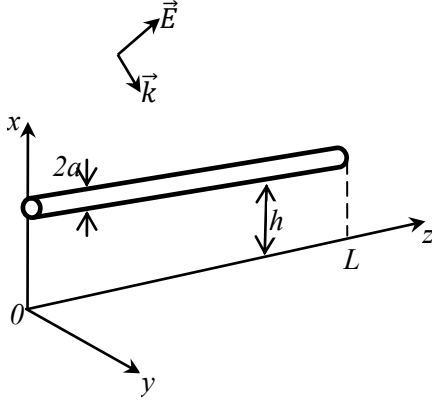


Figure 1: Géométrie de la configuration.

En présence d'un champ électromagnétique externe exciteur et dans le cas d'un fil sans diélectrique, on peut établir, à partir des équations de Maxwell, le système d'équations intégral-différentielles suivant [5]:

$$\frac{dV^s(z)}{dz} + j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^L g(z-z') I(z') dz' = E_z^e(h, z) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dz} \int_0^L g(z-z') I(z') dz' + j\omega 4\pi\epsilon_0 V^s(z) = 0 \quad (2)$$

Où  $V^s(z)$  est la tension représentant le champ diffracté  $E_x^s$ ,  $I(z')$  est le courant le long de la ligne,  $E_z^e$  est le champ électromagnétique d'excitation (obtenu par la somme du champ incident et du champ réfléchi en l'absence de la ligne de transmission), et le terme de Green

$$g(z-z') = \frac{e^{-jk\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}} - \frac{e^{-jk\sqrt{(z-z')^2+4h^2}}}{\sqrt{(z-z')^2+4h^2}} \quad (3)$$

$z$ ,  $z'$  et  $k$  sont respectivement les positions des points d'observation et source sur la ligne et le nombre d'onde.

Quand les conditions ci-dessus relatives au rayon, à la hauteur et à la longueur sont respectées, le terme de Green précédent peut être approximé par [5]:

$$g(z-z') \approx \frac{1}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z-z')^2+4h^2}}$$

Et comme, sous ces conditions  $g(z-z')$  tend rapidement vers 0 pour  $|z-z'| \gg 2h$ , donc on peut faire l'approximation d'un courant localement constant  $I(z')=I(z)$ :

$$\psi(z) = \int_0^L g(z-z') I(z') dz' = I(z) \int_0^L g(z-z') dz'$$

$$\psi(z) = I(z) \int_0^L \left[ \frac{1}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z-z')^2+4h^2}} \right] dz'$$

Puisque la ligne considérée est uniforme, le résultat observé au point d'observation n'est pas affecté par sa position. Par conséquent, pour simplifier les calculs, on considère  $z=0$ . On aura donc:

$$\psi(z) = I(z) \int_0^L \left[ \frac{1}{\sqrt{z'^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z'^2+4h^2}} \right] dz' = G I(z)$$

Après quelques calculs mathématiques, on trouvera l'expression suivante:

$$G = 2 \ln \left( \frac{a}{2h} \right) + 2 \ln \left\{ \frac{\frac{-L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 4h^2}}{\frac{-L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + a^2}} \right\}$$

$$= 2 \ln \left( \frac{a}{2h} \right) + 2 \ln \left\{ \frac{\left[ \left(\frac{L}{2}\right)^2 + 4h^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] \left[ \frac{L}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2a}{L}\right)^2} \right) \right]}{\left[ \left(\frac{L}{2}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] \left[ \frac{L}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{L}\right)^2} \right) \right]} \right\}$$

Or, comme  $a \ll L$  et  $2h \ll L$ , on aura:

$$G = 2 \ln \left( \frac{2h}{a} \right) \quad (4)$$

Finalement,

$$\psi(z) = 2 I(z) \ln \left( \frac{2h}{a} \right)$$

Posons maintenant,  $L'_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} G$  et  $C'_0 = \frac{4\pi\epsilon_0}{G}$ , en remplaçant dans les équations (1) et (2), on aura:

$$\frac{dV^s(z)}{dz} + j\omega L'_0 I(z) = E_z^e(h, z) \quad (5)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} + j\omega C'_0 V^s(z) = 0 \quad (6)$$

La théorie des lignes de transmission revient donc à approximer le terme de Green (3) par (4), et ainsi calculer les paramètres linéiques de la ligne de transmission. Les équations (5) et (6) représentent le modèle d'Agrawal pour l'exemple décrit plus haut.

Dans le cas d'un circuit (fig. 2), il convient de signaler que l'approximation de cette fonction de Green (et donc le modèle d'Agrawal) ne tient pas compte de l'existence des fils verticaux, ni de l'interaction entre fils verticaux et fil horizontal. Par ailleurs, les conditions aux limites de la ligne de transmission imposées par les charges d'extrémité ne sont pas à ce stade discutées.

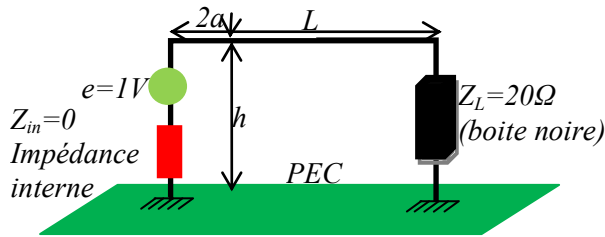


Figure 2: Description de la configuration étudiée.  
 $L=5m$ ,  $a=1mm$ , hauteur et fréquence variables.

Comme on l'a vu, cette approximation du terme de Green est tributaire de la gamme de fréquences utilisée. L'objectif est ici d'évaluer les limites de cette approximation lorsque:

- 1) les impédances d'extrémités sont faibles ou grandes
- 2) la hauteur est bien inférieure ou non à la longueur de la ligne et à la longueur d'onde.

L'objectif est de quantifier ces approximations et de corriger celles-ci, si nécessaire, par des méthodes appropriées.

De nombreux auteurs ont déjà entamé des travaux d'amélioration de la théorie des lignes de transmission. Dans le contexte des lignes de transport de l'énergie électrique les équations des lignes de transmission améliorées ont vu le jour [5]. Pour traiter la problématique CEM dans le domaine des circuits intégrés et des interconnexions, un modèle amélioré des équations de lignes de

transmission a également été dérivé à partir d'une formulation intégrale [6, 7]. D'autres approches ont également vu le jour pour traiter le cas multiconducteur, notamment, dans le contexte automobile ou aéronautique. Ces méthodes sont numériques comme dans [8-11], ou semi-analytique [12-14]. Une démarche originale a été suivie dans [13, 14] et consiste en la généralisation de la théorie des lignes de transmission aux cas de lignes multifilaires non-uniformes. Les équations ainsi dérivées ne sont plus limitées aux basses fréquences mais contiennent également les modes supérieurs.

### 3. MODELISATION DE LA LIGNE DE TRANSMISSION AVEC LA METHODE DES MOEMENTS

La modélisation du circuit de la figure 2 dans NEC a été réalisée de la manière suivante: un fil horizontal parfaitement conducteur de rayon  $a=1mm$ , de hauteur  $h$ , de longueur  $L_0=5m$  divisé en 499 segments, alimenté par une source de tension de 1V et terminé par une charge  $Z_L$ . Sa hauteur  $h$  est matérialisée par deux fils verticaux connectés à un plan parfaitement conducteur.

Pour l'étude de l'influence de la charge, la fréquence du courant était de 27.35 MHz (fréquence de résonance de la ligne), la hauteur  $h=0.3m$  est divisée en 29 segments. La charge d'extrémité a été une première fois de  $20\Omega$  et par la suite de  $1\Omega$ . La source et les charges sont matérialisées exactement au milieu des deux brins verticaux, soit sur le segment n°15. La résistance de rayonnement (rayonnement total de la ligne vu par la source) est extraite à la fréquence de résonance de la ligne prédite par la TLT, soit à 30 MHz. A cette fréquence, elle est de  $2.35\Omega$  pour une charge de  $1\Omega$  et de  $3.82\Omega$  pour une charge de  $20\Omega$ .

Pour l'étude de l'influence de la hauteur, le circuit de la figure 2 est terminé par une charge de  $100\Omega$ . La hauteur de la ligne horizontale (donc longueur des brins verticaux) est de 1 cm (1 segment), 10 cm (9 segments) et 20 cm (19 segments). La fréquence du signal d'excitation est de 300 MHz. Comme précédemment, la charge et la source sont situées exactement au milieu des brins verticaux. A la fréquence précédente, pour une hauteur  $h = \lambda/100$  la résistance de rayonnement est de  $0.36\Omega$ , pour  $h = \lambda/10$  elle est de  $26.04\Omega$  et pour  $h = \lambda/5$  elle devient  $116.44\Omega$ .

#### 4. INFLUENCE DE LA CHARGE

Avec la TLT, l'étude a été effectuée à la fréquence de résonance prédite par cette dernière qui est de 30MHz (sans la prise en compte des fils verticaux) en utilisant un pas de déplacement (largeur de la cellule R-L-C-G) de l'ordre de 1 cm.

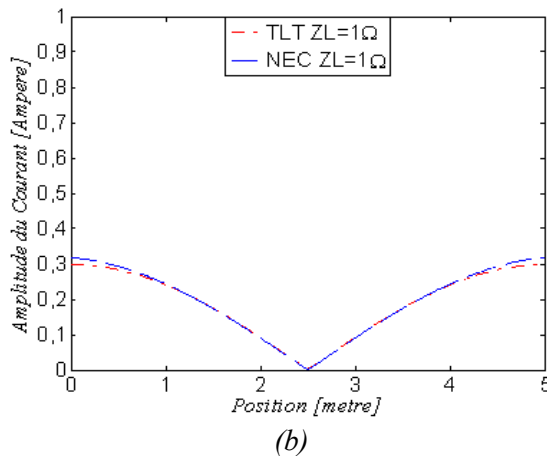
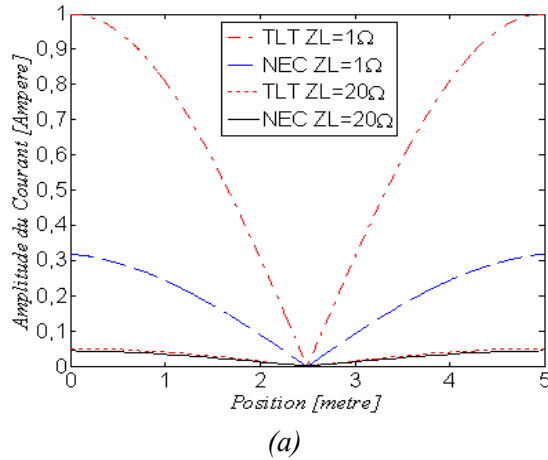


Figure 3 : Influence des charges d'extrémité. Figure (a) TLT sans correction. Figure (b) Correction.

La figure 3-a montre un contraste de courant lorsque la ligne est chargée par 1  $\Omega$  ou 20  $\Omega$ .

Nous attirons l'attention sur le fait que les conditions d'applicabilité de la théorie des lignes de transmission sont théoriquement remplies puisqu'on est à une hauteur  $h = \lambda/33$  ( $h=0.3$  m,  $\lambda=10$  m). Cependant, on voit que si on prend une tolérance d'erreur de 30% par exemple, la TLT prédit de bons résultats pour la charge de 20  $\Omega$  et échoue pour 1  $\Omega$ .

Néanmoins, lors de l'incorporation de la résistance de rayonnement qu'on distribue sur la longueur de la

ligne (fig. 3-b), on remarque que la TLT donne, cette fois-ci, de bons résultats aussi pour le cas de la charge de 1  $\Omega$ .

On constate donc que pour une charge de 1  $\Omega$  la résistance de rayonnement ne peut plus être négligeable et joue un rôle important quant à la détermination de la distribution du courant, ce qui n'est pas nécessairement le cas lorsque la charge de l'extrémité est beaucoup plus importante que la résistance de rayonnement de la ligne comme dans le cas ci-dessus où la charge est de 20  $\Omega$ .

En résumé, la contribution des pertes par rayonnement peut ne plus être négligeable, même sous les conditions quasi-statiques ( $h \ll \lambda$ ) et en régime résonnant, et ceci selon les conditions de charge à l'extrémité.

#### 5. INFLUENCE DE LA HAUTEUR ET DES FILS DE DESCENTE

L'applicabilité de la théorie des lignes de transmission suppose que la hauteur soit **très inférieure** à la longueur d'onde. L'évaluation suivante a pour but de quantifier l'erreur commise suivant la hauteur choisie **très petite, petite, voir grande** devant la longueur d'onde.

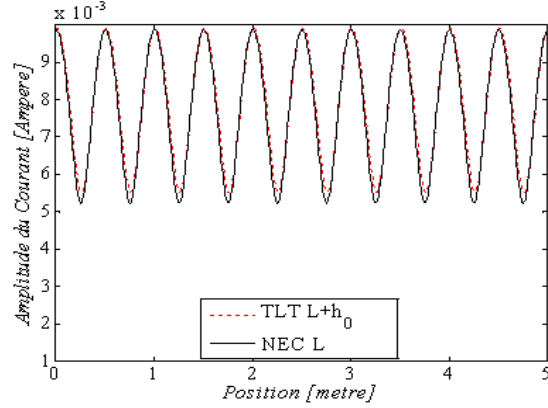
La longueur de la ligne a été dans un premier temps gardée égale à sa longueur physique, ensuite corrigée avec sa hauteur à chaque extrémité  $L'=L+2h$  [15]. Une autre correction a été utilisée en posant  $L'=L+h_0$  [16],  $h_0$  étant la hauteur équivalente de la ligne donnée, en basses fréquences, par  $h_0 = \frac{h}{1-(\eta/2\pi Z_c)}$  avec  $\eta$  et  $Z_c$  étant respectivement les impédances caractéristiques du vide et de la ligne (rappelons que  $h \gg a$ ). Dans ce qui suit on présentera la correction effectuée en utilisant cette deuxième correction, car elle donne de meilleurs résultats.

Les figures (4-a), (4-b) et (4-c) représentent l'amplitude du courant le long du fil horizontal en utilisant d'une part la théorie des lignes de transmission et d'autre part la méthode des moments. Dans ce contexte, la longueur de la ligne a été allongée avec la hauteur  $h_0$ .

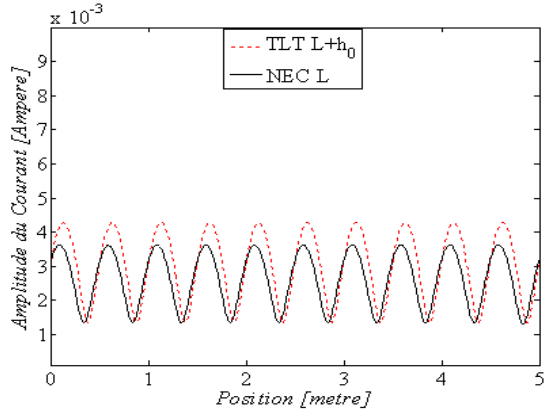
Sur les figures (4-d) et (4-e), la correction par la résistance de rayonnement (distribuée sur la longueur de la ligne) a été également introduite.

En se rapportant aux tableaux I et II ci-dessous, et si on considère un critère quantitatif de l'erreur commise lors du passage des équations de Maxwell

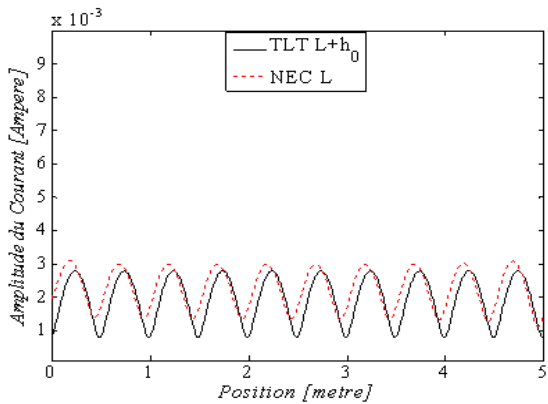
à la théorie des lignes de transmission, par exemple de l'ordre de 30%, on constate que l'influence des conditions aux limites est très importante quant à l'appréciation des résultats de la TLT. Les écarts observés pour de faibles hauteurs par rapport à la longueur d'onde sont donc essentiellement attribuables à cette différence de représentation (avec ou sans brins verticaux).



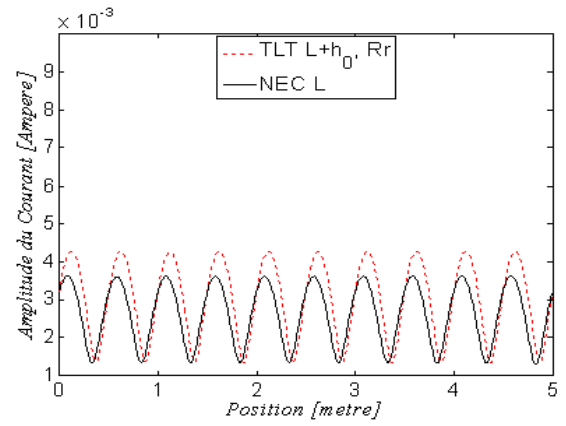
(a)  $h = \lambda/100$



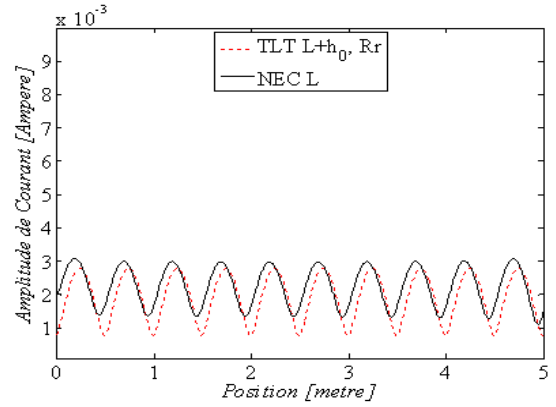
(b)  $h = \lambda/10$



(c)  $h = \lambda/5$



(d)  $h = \lambda/10$



(e)  $h = \lambda/5$

Figure 4 : Influence des fils verticaux et de la hauteur. Figures (4-a, 4-b, 4-c)  $L' = 5m + h_0$  [16]. Figures (4-d, 4-e) prise en compte de la résistance de rayonnement.

La prise en compte de la résistance de rayonnement (tableau III) n'apporte pas une meilleure correction car pour la hauteur  $h = \lambda/100$  et  $h = \lambda/10$  elle est faible par rapport à la charge d'extrémité. Cependant, dans le cas d'une hauteur  $\lambda/5$ , bien que la résistance de rayonnement soit supérieure à la charge d'extrémité, les résultats TLT sont toujours loin de ceux de NEC, car dans ce cas la TLT n'est plus applicable. Selon l'erreur de l'approximation tolérée, il convient donc de ne plus négliger tous ces effets.

Cependant, quand la théorie des lignes n'est plus applicable (quand  $h > \lambda/10$ ), il convient de chercher de nouvelles méthodes de simulation permettant de se passer de cette limitation. Cette conclusion dépend, comme on l'a vu plus haut, des conditions d'impédances de charge aux extrémités de la ligne.

**TABLE I. ERREURS RELATIVES-AVANT TOUTE CORRECTION**

Calcul de l'erreur	Hauteur de la ligne		
	$\lambda/100$	$\lambda/10$	$\lambda/5$
Source	1.45%	207.07%	412.51%
Charge	1.62%	212.11%	574.86%
Amplitude max	1.43%	174.90%	223.97%
Amplitude Min	6.52%	140.45%	149.63%

**TABLE II. CORRECTION AVEC  $H_0$ [16]**

Calcul de l'erreur	Hauteur de la ligne		
	$\lambda/100$	$\lambda/10$	$\lambda/5$
Source	0.16%	1.66%	59.36%
Charge	0.07%	3.69%	46.68%
Amplitude max	0.44%	17.71%	9.72%
Amplitude Min	5.48%	2.94%	30.45%

**TABLE III. CORRECTION AVEC  $H_0$  ET LA RESISTANCE DE RAYONNEMENT**

Calcul de l'erreur	Hauteur de la ligne		
	$\lambda/100$	$\lambda/10$	$\lambda/5$
Source	0.24%	1.67%	59.05%
Charge	0.50%	3.81%	46.70%
Amplitude max	0.004%	17.63%	9.72%
Amplitude Min	4.9%	2.85%	30.46%

## 6. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cet article a pour objectif de faire le point sur les différents facteurs qui contribuent aux erreurs d'approximation liées à l'utilisation de la théorie des lignes. Ces facteurs sont connus mais leur quantification est difficile à maîtriser car elle tient à une combinaison plus ou moins favorable de ces facteurs (représentation du circuit d'extrémité par des fils de descente, influence de la hauteur et pertes de rayonnement engendrées, influence des charges d'extrémité). Il s'agit d'attirer l'attention (à nouveau) sur les difficultés que représente l'application de la TLT.

Cette communication a pour objectif de spécifier les domaines d'applications pour lesquels la théorie des

lignes peut être appliquée, suivant un critère d'erreur toléré, avec ou sans corrections simples appropriées.

Nos travaux futurs seront consacrés à l'extension de la théorie des lignes de transmission dans les situations qui requièrent une correction.

## 7. REMERCIEMENTS

Ces travaux de thèse sont soutenus par le CNRS et la société PSA Peugeot-Citroën.

## 8. REFERENCES

- [1] C. D. Taylor, R. S. Satterwhite et C. W. Harrison, "The Response of a Terminated Two-Wire Transmission Line Excited by a Nonuniform Electromagnetic Field", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **AP-13**, pp. 987-989, Nov. 1965.
- [2] A. K. Agrawal, H. J. Price et S. H. Gurbaxani, "Transient Response of a Multiconductor Transmission Lines Excited by a Nonuniform Electromagnetic Field", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, **EMC-22**, pp. 119-129, Mai 1980.
- [3] F. Rachidi, "Formulation of the Field-to-Transmission Line Coupling Equations in Terms of Magnetic Excitation Fields", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. **35**, pp. 404-407, Août 1993.
- [4] C. A. Nucci, F. Rachidi, "On the Contribution of the Electromagnetic Field Components in Field-to-Transmission Line Interaction", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. **37** No 4, pp. 505-508, Nov. 1995.
- [5] F. Rachidi et Sergey V. Tkachenko, *Electromagnetic Field Interaction with Transmission Lines From Classical Theory to HF Radiated Effects*, édité par WIT Press, Chapitre 4, pp. 124-129, Fév. 2008.
- [6] A. Maffucci, G. Miano et F. Villone, "An Enhanced Transmission Line Model for Conducting Wires", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. **46** No 4, pp. 512-528, Nov. 2004.
- [7] A. Maffucci, G. Miano et F. Villone, "An Enhanced Transmission Line Model for Conductors With Arbitrary Cross Sections", *IEEE Transactions on Advanced Packaging*, Vol. **28** No 2, pp. 174-188, Mai 2005.
- [8] L. Paletta, J.P. Parmantier, F. Issac, P. Dumas et J.C. Alliot, "Susceptibility Analysis Of Wiring in a Complex System Combining a 3-D Solver and a Transmission-Line Network Simulation", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. **44** No 2, pp. 309-317, Mai 2002.
- [9] Y. Bayram et J.L. Volakis, "A Hybrid Electromagnetic-Circuit Method for Electromagnetic Interference Onto Mass Wires", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. **49** No 4, pp. 893-900, Nov. 2007.
- [10] G. Andrieu, A. Reineix, X. Bunlon, J.P. Parmantier, L. Koné et B. Démoulin "Extension of "the Equivalent Cable Method" for Modeling Electromagnetic Emissions of Complex Cable Bundles", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. **51** No 1, pp. 108-118, Fév. 2009.
- [11] G. Bağcı, A.E. Yilmaz J.M. Jin et E. Michielssen, "Fast and Rigorous Analysis of EMC/EMI Phenomena on Electrically Large and Complex Cable-Loaded Structures", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. **49** No 2, pp. 361-381, Mai 2007.
- [12] Y. Xie, F.G. Canavero, T. Maestri et Z. Wang, "Crosstalk Analysis of Multiconductor Transmission Lines Based on Distributed Analytical Representation and Iterative Technique", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. **52** No 3, pp. 712-727, Août 2010.
- [13] H. Haase, J. Nitsch et T. Steinmetz, "Transmission Line Super Theory: A New Approach to an Effective Calculation of Electromagnetic Interactions", *URSI Radio Science Bulletin (Review of Radio Science)*, **307**, pp. 33-60, Dec. 2003.
- [14] J. Nitsch, F. Gronwald et G. Wollenberg, *Radiating Nonuniform Transmission-Line Systems and Partial Elements Equivalent Circuit Method*, édité par John Wiley & Sons, Chapitre 2, pp. 57-135, Nov. 2009.
- [15] P. Degaque et A. Zeddani, "Remarks on the Transmission-Line Approach to Determining the Current Induced on Above-Ground Cables", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. **30** No 1, pp. 77-80, Fév. 1988.
- [16] S.A. Pignari et D. Bellan, "Incorporating Vertical Risers in the Transmission Line Equations With External Sources", *Int. Symp. On Electromagn. Compat.*, Août 9-13, 2004, Vol. 3, pp. 974-979.